MA1 – přednáška 18. 11. 2019

1. Ještě „dodatek" k předchozí přednášce – asymptoty grafu funkce:

Bylo: Přímka o rovnici $y = ax+b$, $a \neq 0$, je šikmá asymptota grafu funkce f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), když

$$\lim_{x \to +\infty\,(-)} (f(x) - (ax+b)) = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

Jak „najít" $\underline{a}$ a $\underline{b}$?

Je-li přímka $y = ax+b$ šikmou asymptotou v $+\infty$ $(-\infty)$, pak (z (1)) dostaneme, že $\lim\limits_{x \to +\infty\,(-)} x\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0$,

a tedy „musí" $\left(\lim\limits_{x \to \infty\,(-\infty)} x = \underset{(-)}{+}\infty\right)$ být $\lim\limits_{x \to +\infty\,(-)} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0$,

tedy $\lim\limits_{x \to \underset{(-)}{+}\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0$ (neboť $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{b}{x} = 0$) a

tedy $\underline{a = \lim\limits_{x \to +\infty\,(-)} \frac{f(x)}{x} \quad \ldots \quad (2)}$

Potom $\underline{b = \lim\limits_{x \to \underset{(-)}{+}\infty} (f(x) - ax) \ldots (3)}$ (dostaneme z (1) a (2))

Obráceně: platí-li (2) a (3), pak lze ukázat, že platí (1).

Příklad: $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ (celý průběh je mezi vyřešenými příklady a průběhu funkcí na „webu")

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = „\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2} =$

$= \pm\infty$ (a zároveň „vidíme", že $f(x) \sim x$ v $\pm\infty$, tedy je „naděje" na šikmou asymptotu)

2) $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2} - x\right) = „\infty - \infty" =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 - x(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \dfrac{\infty}{\infty} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(4 - \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = 4,$

tedy, daná funkce má asymptotu v „$+\infty$" i v „$-\infty$" o rovnici $\underline{y = x + 4}$.

2. <u>Příklady vyšetřování globálních extrémů funkce</u> – – viz řešené příklady k minulé přednášce 13.11.

3. Taylorův polynom funkce

„Motto": „vylepšené" lineární aproximace funkce f v okolí bodu $\underline{a}$ polynomem vyššího stupně za „pomoci" derivací vyšších řádů.

Jak? Bylo (lineární aproximace funkce v okolí bodu $\underline{a}$):

existuje-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a)$,

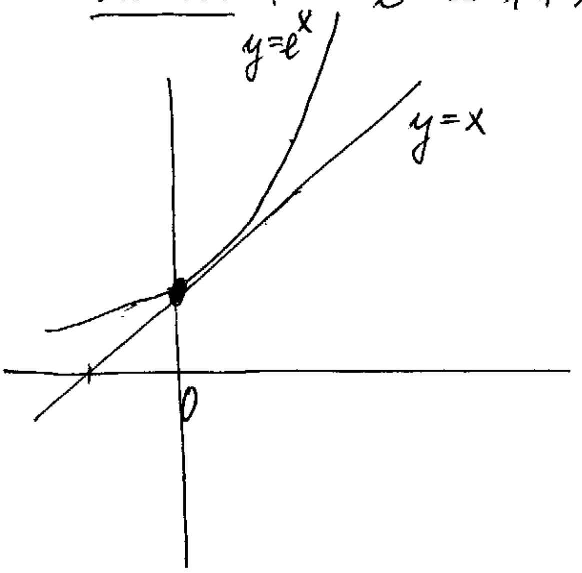
kde $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$, a pak $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$

v okolí bodu $\underline{a}$ (pro „malá" $(x-a)$) (a $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

je rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$

(tj. tečna je „grafem lineární aproximace" v okolí bodu $\underline{a}$).

Příklad: $e^x \cong 1 + x$ v okolí bodu $a = 0$;



když se budeme „vzdalovat" od bodu $a=0$ (obecně od bodu $\underline{a}$), pak už chyba aproximace se obecně bude zhoršovat:

$e^1 \cong 1 + 1 = 2$, ale víme, že $e \cong 2{,}71\ldots$

Jak aproximaci zlepšit tak, že by chyba byla „malá" i pro vzdálenější body x (od bodu a)? Musíme „vyrobit" parabolu tak, aby procházela bodem $[a, f(a)]$, měla stejnou tečnu v bodě $[a, f(a)]$ s grafem f a byla „stejně" prohnutá!

„Prohnutí" grafu funkce pomohla charakterizovat druhá derivace funkce v okolí uvažovaného bodu – zkusme:

Hledejme polynom $T_2(x)$ druhého stupně tak, aby platilo:

$$f(a) = T(a), \quad f'(a) = T'(a) \quad \text{(společná tečna grafů)}$$

$$\text{a } f''(a) = T''(a)$$

Předpokládejme, že existuje $f''(a) \in R$:

a $T_2(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$, A, B, C – ?

Chceme-li:

1) $f(a) = T(a) \Rightarrow A = f(a)$

2) $f'(a) = T'(a) \Rightarrow B = f'(a)$

3) $f''(a) = T''(a) = 2C \Rightarrow C = \dfrac{f''(a)}{2}$

Tedy, hledaný polynom je

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

pak $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ (chybu zde označujeme $R_2(x)$)

a bylo by „dobré", kdyby platilo (analogicky jako u lineární aproximace)

$$\lim_{x \to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0 \quad (?)$$

Zkusme:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right)}{(x-a)^2} = \text{,,}\frac{0}{0}\text{``} =$$

(ex. $f''(a) \Rightarrow$ ex. $f'(x)$ v $U(a) \Rightarrow f$ je spojitá v $U(a)$)

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} - f''(a)\right) = 0$$

(neboť $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$, zde předpokládáme $f''(a) \in R$)

A ukázalo se, že se takto (jako s polynomem druhého stupně) může „dále zlepšovat" aproximace funkce f v okolí bodu a, pokud f má v bodě $\underline{a}$ derivace vyšších řádů:

Definice: Nechť $f^{(n)}(a) \in R$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se nazývá Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě $\underline{a}$.

(Poznámka: existuje-li $f^{(n)}(a)$, $n \in N \Rightarrow$ funkce f má všechny derivace nižšího řádu v $U(a)$)

a platí:

Věta o Taylorově polynomu:

Nechť funkce f má $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom nejvýše n-tého stupně, pro který platí:

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + R_n^{f,a}(x) \quad ($$

tak, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 .$$

(Tedy, vezmeme-li aproximaci $f(x) \cong T_n^{f,a}(x)$ pomocí Taylorova polynomu v okolí bodu $\underline{a}$, jde chyba aproximace $R_n^{f,a}(x)$ pro $x \to a$ rychleji k nule než $(x-a)^n$.)

($R_n^{f,a}(x)$ se nazývá zbytkem Taylorova polynomu $T_n^{f,a}(x)$)

Příklad: $f(x) = e^x$, $a = 0$;

$$f^{(n)}(x) = e^x, \; f^{(n)}(0) = 1, \text{ a tedy}$$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Dále platí (pro odhad „velikosti" zbytku)

Věta (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť ex. $f^{(n+1)}(x)$ v $U(a,\delta)$, pak $f(x) = T_n^{f,a}(x) + R_n^{f,a}(x)$, kde pro každé $x \in U(a,\delta)$ je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde ξ je bod mezi body x a $\underline{a}$ (tj. $\xi = \xi(x)$).

<u>Příklad</u>: Už víme, že $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $x \in R, n \in N$

a pak: $R_n(x) = \dfrac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$, kde ξ je „mezi" 0 a x.

Pro $x = 1$ je $\xi \in (0,1)$ a tedy $e^{\xi} \leqq 3$ a máme odhad chyby

$|R_n(1)| \leq \dfrac{3}{(n+1)!}$. Lze tedy

(i) pro n-pevné odhadnout velikost chyby, například pro $n = 5$ je $|R_5(1)| \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \doteq 0{,}004166$

a výpočet užitím $T_5(x)$ dá $e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} =$

$= 2{,}7166\dots$

a kalkulačka: $e = 2{,}71828$.

(ii) pro požadovanou přesnost výpočtu čísla $\underline{e}$ najít $n \in N$ tak, aby $R_n(1)$ byl „požadovaně malý":

např. chceme-li $|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$, stačí $n = 7$.

<u>Další příklad</u>: <u>Taylorův polynom pro funkci $f(x) = \sin x$, $a = 0$</u>

$f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ tedy

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a $R_{2n+2}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+3)!} x^{2n+3}$, a tedy $|R_{2n+2}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$

(lze uvažovat zbytek po $T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$) a

$\sin 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$ a $|R_{10}(1)| \leq \frac{1}{11!}$

Analogicky: $f(x) = \cos x\,,\ a = 0$

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k,\quad f^{(2k+1)}(0) = 0\,,\quad \text{pak}$$

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{a}\ \left| R_{2n+1}(x) \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Poznámka o Taylorově řadě pro funkci e^x (v bodě $a = 0$)

Víme, že pro lib. $n \in N$ je

$$(1) \qquad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)\,; \quad R_n(x) = \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\,;$$

(ξ mezi 0 a x)

pak $|R_n(x)| \le \frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$ pro $x > 0$, a $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

a tedy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (užijeme toho, že $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ a věty o limitě sevřené posloupnosti)

Tedy, přejdeme-li v rovnosti (1) k limitě pro $n \to \infty$, dostaneme ($\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \frac{x^k}{k!} = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$ – definice „nekonečné řady")

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{pro lib. } x \in R}$$

(Vyjádření funkce $f(x) = e^x$ Taylorovou řadou)